Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 14 giugno 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x - 2}\right)$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), eventuali punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di concavità e convessità. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo, dobbiamo imporre che il suo argomento sia strettamente positivo, ovvero $\frac{e^{2x}}{e^x-2} > 0$ che si riduce alla condizione $e^x - 2 > 0$ soddisfatta se e solo se $x > \log 2$. Inoltre, affinché la funzione sia definita il termine al denominatore non deve annullarsi, ovvero $e^x - 2 \neq 0$, che equivale a $x \neq \log 2$. Il dominio della funzione è quindi l'insieme $D = (\log 2, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile sul suo dominio in quanto composizione di funzioni derivabili nel loro dominio. Possiamo calcolare i limiti agli estremi del dominio ed otteniamo

$$\lim_{x\to\log 2^+} \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x - 2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x - 2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^x\left(\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}\right)\right) = +\infty.$$

La funziona presenta quindi l'asintoto verticale $x = \log 2$ e non presenta asintoti orizzontali. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{e^{2x}}{e^x-2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(\left(\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}\right)\right)}{x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}\right)}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x - 2}\right) - x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x(e^x - 2)}\right) = 0$$

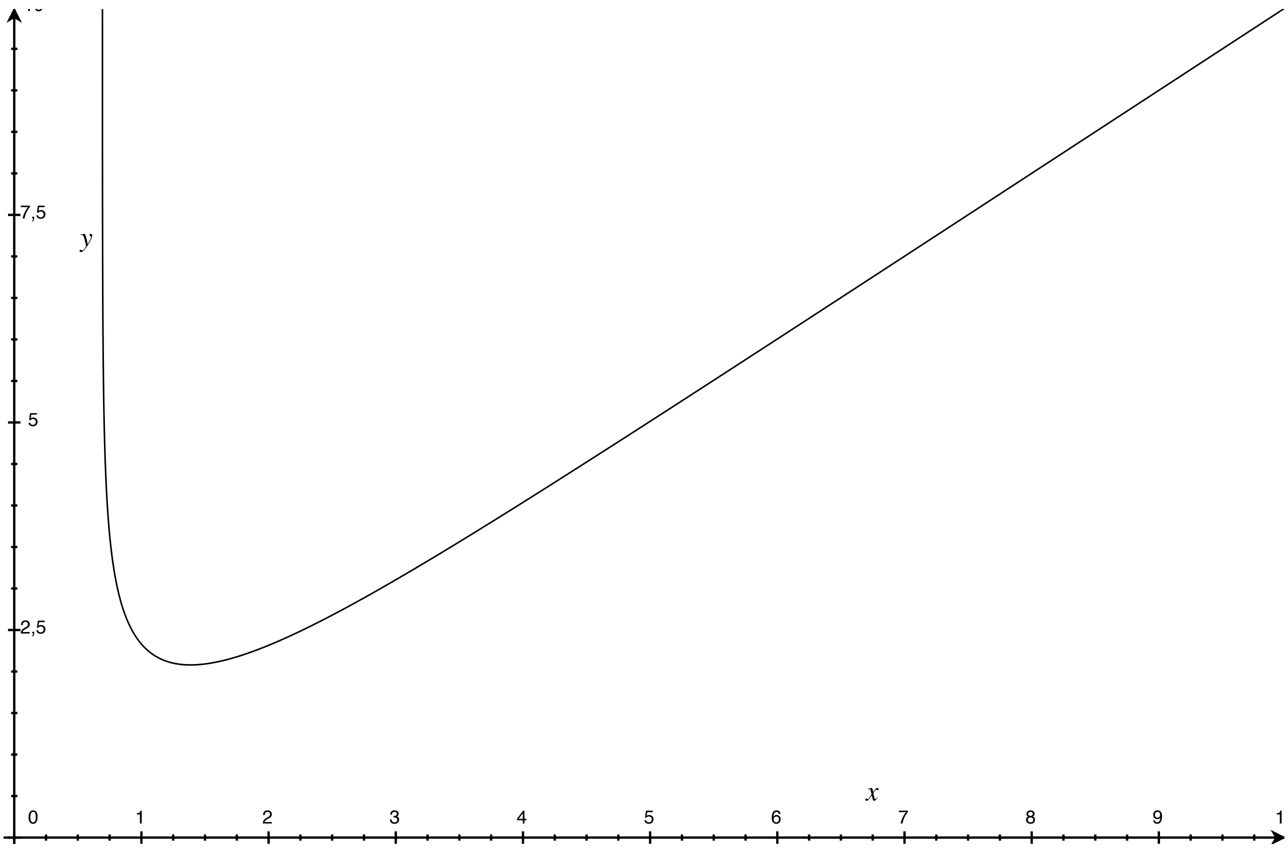
da cui deduciamo l'esistenza dell'asintoto obliquo $y = x$ per x che tende a $+\infty$. I limiti ci indicano che la funzione non è superiormente limitata: $\sup(f) = +\infty$. Osserviamo poi che per ogni $x \in D$ vale $\frac{e^{2x}}{e^x-2} > 1$ e di conseguenza $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. La funzione è in particolare inferiormente limitata. Il Teorema di Weierstrass generalizzato, dato che i limiti agli estremi del dominio valogono entrambi $+\infty$, garantisce l'esistenza di un minimo assoluto. Per trovare il punto di minimo, studiamo la derivata prima. Applicando la regola di derivazione della funzione composta e la regola di derivazione del quoziente, si calcola:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 2}{e^{2x}}\right)\left(\frac{2e^{2x}(e^x - 2) - e^{2x}e^x}{(e^x - 2)^2}\right) = \frac{e^x - 4}{e^x - 2}.$$

Dallo studio del segno di f', risulta $f'(x) > 0$ per $x > \log 4$ e $f'(x) < 0$ per $\log 2 < x < \log 4$. La funzione è decrescente sull'intervallo $(\log 2, \log 4)$, mentre è crescente sulla semiretta $(\log 4, +\infty)$. Il punto $x_m = \log 4$ è punto di minimo assoluto per la funzione. Per studiare la convessità della funzione, ne calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2e^x}{(e^x - 2)^2}.$$

Notiamo che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$ e di conseguenza la funzione è strettamente convessa su tutto il suo dominio.



Esercizio 2 Data la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n n! + \left(\sqrt{n^2+n}\right) e^{\frac{1}{n}}}{n}$$

definita per $n \geq 1$, studiarne la monotonia. Determinare poi se ammette massimo e/o minimo.

Soluzione

Mostriamo che la successione è definitivamente a segni alterni. Questo implica poi che non può essere né crescente, né decrescente, dunque non è monotona.

Notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right) e^{\frac{1}{n}}}{n!} = 0$$

per confronto tra infiniti, e quindi, se poniamo $b_n = \frac{(-1)^n n!}{n}$, si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Questo implica, per il teorema di permanenza del segno, che definitivamente a_n e b_n hanno lo stesso segno, e visto che b_n è chiaramente a segni alterni, questo è vero anche per a_n, definitivamente.

(Alternativamente, per rispondere alla sola domanda sulla monotonia, si può semplicemente notare che a_2 e a_4 - così come tutti gli a_{2k} - sono positivi, mentre $a_3 = (-6+\sqrt{12}\, e^{1/3})/3$ è palesemente negativo. Questo implica che la successione non è monotona.)

Infine notiamo che $|b_n| = \frac{n!}{n}$ tende a $+\infty$, dunque questo è vero anche per $|a_n| = |b_n||\frac{a_n}{b_n}|$, e visto che la successione a_n è a segni alterni e tende a $+\infty$ in valore assoluto, segue che non ha né massimo né minimo.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx.$$

Soluzione

Visto che l'esercizio chiede di calcolare l'integrale, e non soltanto capirne la natura, cerchiamo una primitiva, cioè calcoliamo l'integrale indefinito $\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$. Applichiamo la sostituzione $t = \frac{1}{x}$, per cui $dt = -\frac{1}{x^2}dx$,

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \int -te^t dt$$

e ora integriamo per parti, derivando t,

$$\int -te^t dt = -\int te^t dt = -te^t + \int e^t dt = e^t(1-t).$$

Tornando in x vediamo che

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = e^{1/x}(1-1/x).$$

Possiamo ora calcolare l'integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} [e^{1/x}(1-1/x)]_1^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty} e^{1/M}(1-1/M) - e(1-1) = 1$$